**© М.А. Леган, В.А. Блинов, 2013**

**СОВМЕСТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ГРАДИЕНТНОГО КРИТЕРИЯ РАЗРУШЕНИЯ**

**М.А. Леган, В.А. Блинов**

***Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН***

***630090, Новосибирск, Россия***

Целью работы было составление алгоритма совместного использования метода граничных элементов и градиентного критерия разрушения, для расчетов на прочность плоских элементов конструкций. Также проведено сравнение результатов расчетов предельной нагрузки по критерию максимальных напряжений и градиентному критерию, как между собой, так и с экспериментальными данными по разрушению образцов.

В градиентном критерии для определения начала разрушения с пределом прочности материала $σ\_{в}$, сравнивается не максимальное, а эффективное напряжение $σ\_{e}$. Эффективное напряжение пропорционально первому главному напряжению $σ\_{1}$ в рассматриваемой точке тела, принятому в качестве эквивалентного. Кроме того, $σ\_{e}$ зависит от локальной неравномерности поля напряжений в окрестности рассматриваемой точки и представительного размера неоднородности материала. Локальная неравномерность распределения напряжений характеризуется относительным градиентом $g\_{ν}$ положительного нормального напряжения $σ\_{ν}$, действующего на плоскости, включающей площадку первого главного напряжения в рассматриваемой точке тела, где плоскость и площадка имеют общую нормаль $ν,$

$$g\_{ν}=\frac{\left|grad σ\_{ν}\right|}{σ\_{ν}}$$

Относительный градиент находится с использованием решения соответствующей задачи теории упругости. Выражение для эффективного напряжения записывается в виде

 $σ\_{e}=\frac{σ\_{1}}{1-β+\sqrt{β^{2}+L\_{1}g\_{ν}}} ,$ (1)

где $L\_{1}$ – параметр, имеющий размерность длины и характеризующий неоднородность материала;

$β$ – неотрицательный безразмерный параметр $(β\geq 0)$, который можно рассматривать как параметр аппроксимации.

Параметр $L\_{1}$ находится в [1] из условия согласования градиентного критерия с линейной механикой разрушения и выражается через известные характеристики материала – предел прочности $σ\_{в}$ и критический коэффициент интенсивности напряжения $K\_{Ic}$ – по формуле

$L\_{1}=\left({2}/{π}\right){K\_{Ic}^{2}}/{σ\_{в}^{2}}$(2)

Будем считать, что разрушение в окрестности рассматриваемой точки начинается при достижении эффективным напряжением $σ\_{e}$ предела прочности материала

$$σ\_{e}=σ\_{в}$$

и первоначально распространяется по площадке действия напряжения $σ\_{1}$.

На основе градиентного критерия и метода граничных элементов (в варианте метода фиктивных нагрузок) был разработан численный алгоритм для расчета на прочность. При этом характерная особенность построения алгоритма состоит в том, что в ходе расчетов необходимо определять не только компоненты напряженного состояния, но и их производные по пространственным координатам.

При использовании метода граничных элементов возникает проблема в расчетах, связанная с тем, что напряжения для внутренних точек с удовлетворительной точностью могут быть найдены при условии, что эти точки удалены от контура на расстояние большее длины одного элемента [2]. Всвязи с этим необходимо было разработать алгоритм, позволяющий с высокой точностью вычислять напряжения в точках тела, находящихся вблизи границы.

Численный алгоритм для определения напряжений вблизи границы тела включает в себя два этапа. На первом этапе находим напряжения $σ\_{ν}^{i}$ в средних точках граничных элементов и производные по касательной к контуру ${∂σ\_{ν}^{i}}/{∂s}$ в этих точках. На втором этапе в теле на малом расстоянии $\left|Δ\_{n}\right|$ от граничных элементов основного контура проводим некоторым образом новую гранично-элементную ломаную линию, образующую вспомогательный контур. Используя уравнения равновесия бесконечно малого элемента на контуре тела, определяем приближенно граничные условия для вспомогательного контура, через найденные ранее значения напряжений $σ\_{ν}^{i}$ на основном контуре и производных ${∂σ\_{ν}^{i}}/{∂s}$. Применяя метод граничных элементов к задаче с заданными граничными условиями на вспомогательном контуре и вычисляя напряжения в центре каждого граничного элемента этого контура, мы фактически находим напряжения для интересующих нас внутренних точек исходной задачи, но уже с более высокой степенью точности.

Производные нормального напряжения, необходимые для вычисления модуля градиента определим, используя конечно-разностные формулы численного дифференцирования. Для вычисления производной ${∂σ\_{ν}^{i}}/{∂s}$ нормального напряжения по касательной *s* к контуру воспользуемся трехточечным шаблоном численного дифференцирования с неравными шагами.

Для вычисления производной ${∂σ\_{t}^{i}}/{∂n}$ нормального напряжения по нормали *n* к контуру воспользуемся двухточечным шаблоном численного дифференцирования.

Подставляя вычисленные значения $σ\_{1}$ и $g\_{ν}$ для каждой из средних точек граничных элементов в выражение (1) для $σ\_{e}$ и определяя точку, где эффективное напряжение максимально, найдем место начала разрушения.

Были проведены следующие серии экспериментов с эбонитовыми образцами: растяжение стандартных образцов для установления значений модуля Юнга, коэффициента Пуассона, предела прочности эбонита, растяжение образца с краевыми вырезами для нахождения критического коэффициента интенсивности напряжений, а также трехточечный изгиб балок.

В результате испытаний пяти образцов на одноосное растяжение получено среднее значение предела прочности $σ\_{в}=40,278 МПа$ (стандартное отклонение 1 МПа) и коэффициент Пуассона $ν = 0,45$, а также Модуль Юнга $E=1,79 ГПа$. Из четырех экспериментов над образцами с вырезами был получен коэффициент интенсивности напряжений $K\_{Ic}=2,817 МПам^{{1}/{2}}$ (стандартное отклонение $0,052 МПам^{{1}/{2}}$). Значение $K\_{Ic}$ было получено с помощью приведенной в [3] формулы: $K\_{Ic}=σY(λ)\sqrt{l}$, где $λ$ – отношение глубины выреза к ширине образца, $Y(λ)=1,98+0,72λ-8,48λ^{2}+27,36λ^{3}$. По полученным стандартным характеристикам материала $σ\_{в}$ и $K\_{Ic}$ с помощью (2), вычислено значение $L\_{1}=3.11 мм$. Из листа эбонита толщиной 8 мм были вырезаны образцы для испытаний на трехточечный изгиб с длиной рабочей части 100 мм, и шириной 20 мм. Испытанию на трехточечный изгиб были подвергнуты 6 балок. Получено среднее значение предельной силы $P=1876 H$ (стандартное отклонение 6,84 Н).

Для трехточечного изгиба балки проведено сравнение полученных экспериментальных данных и результатов расчетов предельной нагрузки по двум критериям прочности. Расчетные значения предельных нагрузок приведены в таблице.

**Значения предельных нагрузок.**

|  |  |
| --- | --- |
| Критерий максимальных напряжений | 980 Н |
| Градиентный критерий | 1502 Н |
| Экспериментальные данные | 1876 Н |

Классический критерий максимальных напряжений дает существенно заниженную оценку разрушающей силы по сравнению с экспериментальными данными, в то время как, значение предельной нагрузки по градиентному критерию более близко к значению, полученному экспериментальным путем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Леган М.А.** О взаимосвязи градиентных критериев локальной прочности в зоне концентрации напряжений с линейной механикой разрушения// ПМТФ. 1993. Т 34, №4. С.146-154
2. **Крауч С., Старфилд А**. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987
3. **Партон В.З., Морозов Е.М.** Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985