УДК 539.3

А.Н. Андреев

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН**

Аннотация. Представлена неклассическая математическая модель термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек и пластин. позволяющая учесть поперечные сдвиговые деформации, нелинейное распределение температуры по толщине слоистого пакета, удовлетворить условиям идеального теплового, кинематического и силового сопряжения слоев, условиям термомеханического нагружения на граничных поверхностях оболочки, условиям сопряжения полей деформаций и температур. Неклассические двумерные дифференциальные уравнения связанной задачи термоупругости слоистых композитных оболочек и пластин получены на основе специальной кинематической модели деформирования слоистой оболочки и специальной модели распределения приращения температуры по толщине пакета ее слоев. В пространстве изображений по Лапласу составлен функционал, для которого уравнениями Эйлера соответствующей вариационной задачи служат уравнения пространственной задачи термоупругости в изображениях. Принятые допущения позволили свести данный пространственный функционал к двумерному и получить из него корректные дифференциальные уравнения и краевые условия связанной задачи термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек и пластин в изображениях, а после обращения преобразования Лапласа – в оригиналах.

Ключевые слова: Слоистая композитная оболочка, связанная задача термоупругого деформирования, поперечные сдвиговые деформации.

A.N. Andreev

**A Mathematical Model of Thermoelastic Deformation of Layered Composite Shells and Plates**

Abstract. A non-classical mathematical model of thermoelastic deformation of layered composite shells and plates which allows to take into account transverse shear deformations, non-linear distribution of temperature along the thickness of the layered package, to satisfy of conditions of the ideal thermal, kinematic and force interface of layers, conditions of thermomechanical loading on the boundary surfaces, conditions of interface fields of deformations and temperatures is presented.

Non-classical two-dimensional differential equations of the coupled problem of thermoelastic layered composite shells and plates were obtained on the base of special kinematic model of deformation of a layered shell and a special model of the change of temperature distribution over the thickness of the package of its layers. In the Laplace transform of the image space is made functional for which the Euler equations of the corresponding variation problem of the spatial problem of thermoelasticity in the pictures. Assumptions made it possible to bring this functionality to the two-dimensional space and to get out of it, correct differential equations and boundary conditions of the coupled problem of thermoelastic deformation of layered composite shells and plates in the pictures, and then inventing the Laplace transform – in the originals.

Keywords: layered composite shell, coupled problem of thermoelastic deformation, the transverse shear deformation,

**Введение**. Построение математической модели, адекватно описывающей процесс термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек и пластин, требует разрешения ряда принципиальных вопросов, а именно:

- разработки методики определения интегральных коэффициентов теплопроводности армированного слоя и построения эффективных определяющих уравнений его термоупругого поведения;

- разработки неклассической кинематической модели деформирования слоистой оболочки и нелинейной модели распределения теплового потока по толщине оболочки, позволяющих учесть поперечные сдвиговые деформации, обеспечить условия механического и теплового сопряжения слоев и условия термомеханического нагружения на лицевых поверхностях оболочки;

- построения замкнутой системы дифференциальных уравнений и соответствующих им краевых и начальных условий связанной задачи термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек и пластин;

- разработки и апробации эффективных численных методов решения соответствующих начально-краевых задач.

Рассмотрению этих вопросов посвящены последующие разделы.

**1. Структурная модель термоупругого поведения однонаправлено армированного слоя**

Система допущений, в рамках которой строятся эффективные теплофизические и механические характеристики однонаправлено армированных волокнистых композитов, подробно изложена в [1. 2].

**1.1 Теплопроводность однонаправлено армированного слоя**

Линейный закон Фурье для квазиоднородного анизотропного материала армированного слоя (в двойные угловые скобки заключены средние по объему представительного элемента величины) записывается в виде:

 (1.1.1)



 (1.1.2)

Пояснения всех величин приведены в [1, 2].

**1.2 Определяющие уравнения термоупругого поведения однонаправлено армированного слоя**

Эффективные определяющие уравнения волокнистого композитного материала записываются в виде [1]

 (1.2.1)



Здесь в двойные угловые скобки заключены средние по объему представительного элемента величины. Выражения для физических составляющих тензоров эффективных упругих и температурных жесткостей  и , тензора поперечных сдвиговых податливостей  приведены в [1,2].

**2. Кинематика деформирования многослойной оболочки**

**Закон распределения приращения температуры по толщине оболочки**

Неклассические дифференциальные уравнения связанной задачи термоупругого деформирования многослойной анизотропной оболочки строим на основе следующего допущения [1,2,3] о законе распределения поперечных компонент тензора деформаций по толщине оболочки:

 (2.1)

Распределение компонент вектора перемещений по толщине многослойного пакета и тангенциальных компонент тензора деформаций, соответствующие закону (2.1), имеет вид [1,2,3]

 (2.2)







Закон распределения приращения температуры  по толщине пакета слоев примем в виде [2]

  (2.3)



**3. Вариационные уравнения пространственной задачи термоупругости в изображениях**

Рассмотрим пространственный функционал





 (3.1)

в котором  и  - изображения по Лапласу компонент вектора перемещений и приращения температуры, рассматриваемые как геометрически и термически допустимые независимые функциональные аргументы. Легко убедиться, что необходимое условие экстремума функционала  заключающееся в обращении в нуль его вариации:  содержит в себе как дифференциальные уравнения связанной пространственной задачи термоупругости [4], так и соответствующие им естественные краевые условия. Подставляя (2.1) – (2.3) в (3.1) и выполняя интегрирование по координате  преобразуем (3.1) в двумерный функционал, необходимое условие экстремума которого содержит в себе как дифференциальные уравнения связанной задачи термоупругости слоистых оболочек и пластин в изображениях, так и соответствующие им естественные краевые условия. Применяя к последним обращение преобразования Лапласа, приходим к замкнутой системе дифференциальных уравнений модели термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек





 (3.2)



 (3.3)

и к соответствующей системе граничных условий, требующей задания в каждой точке граничного контура  значений семи величин, альтернативно выбираемых из следующих семи пар

 (3.4)



Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (3.2), (3.3) записываются в виде



 (3.5)

Учет взаимного влияния полей деформаций и температур осуществляется в (3.2) – (3.3) подчеркнутыми слагаемыми. Выражения усилий и обобщенных моментов приведены в [1.2].

**Библиографический список**

1. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск: Наука, 2001.

2. Александр Андреев. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrucken, Deutschland, Изд-во Palmarium Academic Publishing, 2013, 93 с.

3. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. К теории упругих многослойных анизотропных оболочек// Изв. АН СССР. МТТ. 1977. - №5.

4. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970.

Андреев Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии Кемеровского государственного университета; 650043, г. Кемерово, ул. Красная 6.

e-mail: algebra@kemsu.ru